

Nema opisa.

ZADATAK 7.2.15

Osnovka uspravne prizme je trokut sa stranicama duljina 8, 9 i 11 cm. Visina prizme jednaka je najvećoj visini osnovke. Koliki je obujam prizme?

RJEŠENJE

Površina baza je $B = \sqrt{14 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} = 6\sqrt{35}$. Za površinu trokuta vrijedi $P = \frac{a \cdot v}{2}$ pa je $v = \frac{2P}{a} = \frac{2 \cdot 6\sqrt{35}}{8} = \frac{3}{2}\sqrt{35}$.

Obujam prizme je $V = B \cdot v = 6\sqrt{35} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{35} = 9 \cdot 35 = 315 \text{ cm}^3$.

ZADATAK 7.2.16

Osnovka uspravne prizme je trokut sa stranicama duljina 10, 17 i 21 cm. Površina najveće pobočke jednaka je površini osnovke. Koliki su oplošje i obujam prizme?

RJEŠENJE

Površina baze je $B = \sqrt{24 \cdot 14 \cdot 7 \cdot 3} = 84 \text{ cm}^2$. Iz površine pobočke nađemo visinu prizme $v = \frac{P}{B} = \frac{84}{21} = 4 \text{ cm}$. Sada imamo:

$$O = 4 \cdot (10 + 17 + 21) + 2 \cdot 84 = 360 \text{ cm}^2$$

$$V = B \cdot v = 84 \cdot 4 = 336 \text{ cm}^3.$$

ZADATAK 7.2.17

Osnovka uspravne trostrane prizme je trokut sa stranicama duljina 4 cm, 13 cm i 15 cm. Obujam prizme jednak je 240 cm^3 . Izračunaj njezino oplošje.

RJEŠENJE

Površina baze je $B = \sqrt{16 \cdot 12 \cdot 3 \cdot 1} = 24 \text{ cm}^2$. Iz obujma prizme nalazimo visinu $v = \frac{V}{B} = \frac{240}{24} = 10 \text{ cm}$. Oplošje je jednako $O = 2 \cdot 24 + 10 \cdot (4 + 13 + 15) = 368 \text{ cm}^2$.

ZADATAK 7.2.18

Osnovni brid pravilne trostrane prizme dugačak je 6 cm. Ravnina položena bridom \overline{AB} osnovke i vrhom C_1 dijeli prizmu na dva dijela čije su površine u omjeru 2 : 3, ne računajući pritom površinu samog presjeka. Koliko je oplošje te prizme?

RJEŠENJE

Najprije računamo površine dvaju dijelova na koje ravnina dijeli prizmu: $P_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + av$, $P_2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 2av$. Potom iz $P_1 : P_2 = 2 : 3$ nalazimo $v = \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, te je konačno $O = \frac{5a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{5 \cdot 36\sqrt{3}}{4} = 45\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

ZADATAK 7.2.27

Duljina dijagonale kvadra veća je od duljine njegovih bridova za 1, 2, odnosno 3 cm. Kolika je duljina te dijagonale?

RJEŠENJE

Zapišimo: $a = D - 1$, $b = D - 2$, $c = D - 3$, te iz jednadžbe

$$D^2 = (D - 1)^2 + (D - 2)^2 + (D - 3)^2 = D^2 - 2D + 1 + D^2 - 4D + 4 + D^2 - 6D + 9 = 3D^2 - 12D + 14, \text{ odnosno}$$

$$D^2 - 6D + 7 = 0 \text{ dobivamo } D = \frac{6 + \sqrt{36 - 28}}{2} = \frac{6 + 2\sqrt{2}}{2} = (3 + \sqrt{2}) \text{ cm}.$$

ZADATAK 7.2.28

Duljine dijagonala strana kvadra su 11 cm, 19 cm i 20 cm. Kolika je duljina prostorne dijagonale kvadra?

RJEŠENJE

Iz sustava jednačbi $a^2 + b^2 = 11^2$, $b^2 + c^2 = 19^2$, $c^2 + a^2 = 20^2$, zbrajanjem svih triju jednačbi dobivamo

$$2(a^2 + b^2 + c^2) = 11^2 + 19^2 + 20^2 = 882. \text{ Odatle se izravno izračuna } D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{\frac{882}{2}} = \sqrt{441} = 21 \text{ cm}.$$

ZADATAK 7.2.29

Opseg osnovke kvadra je 14 cm, duljina bočnog brida iznosi 12 cm, a prostorne dijagonale 13 cm. Izračunaj oplošje i obujam kvadra.

RJEŠENJE

Imamo sustav jednačbi:

$$\begin{aligned} a + b &= 7 \implies b = 7 - a \\ a^2 + b^2 + c^2 &= 169 \\ c &= 12. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem prve i treće jednačbe u drugu dobivamo:

$$\begin{aligned} a^2 + (7 - a)^2 + 12^2 &= 169 \\ a^2 + 49 - 14a + a^2 + 144 &= 169 \\ 2a^2 - 14a + 193 &= 169 \\ 2a^2 - 14a + 24 &= 0 \\ a^2 - 7a + 12 &= 0 \\ a &= \frac{7 + \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{7 + 1}{2} = 4 \\ b &= 7 - a = 7 - 4 = 3 \end{aligned}$$

te je

$$\begin{aligned} O &= 2(ab + ac + bc) = 2(4 \cdot 3 + 4 \cdot 12 + 3 \cdot 12) \\ &= 2(12 + 48 + 36) = 192 \text{ cm}^2, \\ V &= abc = 4 \cdot 3 \cdot 12 = 144 \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

ZADATAK 7.2.32

Opseg osnovke kvadra iznosi 42 cm. Dijagonalni presjek kvadra, okomit na osnovku, jest kvadrat površine 225 cm². Izračunaj oplošje i obujam kvadra.

RJEŠENJE

Kako je dijagonalni presjek kvadrat, duljina dijagonale osnovke $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ jednaka je duljini treće stranice kvadra, odnosno $a^2 + b^2 = c^2 = 225 \implies c = 15$. Riješimo sustav jednačbi

$$\begin{aligned} a + b &= 21 \implies b = 21 - a & a^2 - 21a + 108 &= 0 \\ \frac{a^2 + b^2}{2} &= \frac{225}{2} & a &= \frac{21 - \sqrt{441 - 432}}{2} \\ a^2 + (21 - a)^2 &= 225 & &= \frac{21 - 3}{2} = 9 \text{ cm} \\ 2a^2 - 42a + 441 &= 225 & b &= 12 \text{ cm.} \\ 2a^2 - 42a + 216 &= 0 & & \end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned} O &= 2(ab + ac + bc) = 2(108 + 135 + 180) \text{ cm}^2 = 846 \text{ cm}^2 \\ V &= abc = 1620 \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

ZADATAK 7.2.35

Površine strana kvadra u međusobnom su omjeru $3 : 6 : 10$ obujam kvadra je 150 cm^3 . Kolike su duljine bridova kvadra?

RJEŠENJE

Iz omjera površina strana kvadra imamo

$$ab = 3k, \quad bc = 6k, \quad ac = 10k.$$

To pomnožimo i dobijemo

$$\begin{aligned} a^2 b^2 c^2 &= (abc)^2 = V^2 = 180k^3 \implies 22\,500 = 180k^3 \\ k^3 &= 125 \implies k = 5. \end{aligned}$$

Duljine stranica su $a = 5 \text{ cm}$, $b = 3 \text{ cm}$, $c = 10 \text{ cm}$.

ZADATAK 7.2.42

Prostorna dijagonala kvadra dugačka je $10\sqrt{2} \text{ cm}$, a prema ravnini osnovke priklonjena je pod kutom od 45° . Jedan je osnovni brid za 2 cm dulji od drugog. Koliki je obujam kvadra?

RJEŠENJE

Iz trokuta kojeg čine prostorna dijagonala, dijagonala osnovke i brid c izračunamo $c = 10\sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ = 10$. Sada imamo:

$$\begin{aligned} b &= a + 2 \\ a^2 + b^2 + c^2 &= (10\sqrt{2})^2 \\ a^2 + (a + 2)^2 + 100 &= 200 \\ 2a^2 + 4a + 4 - 100 &= 0 \\ a^2 + 2a - 48 &= 0 \\ (a - 6)(a + 8) &= 0 \implies a = 6 \text{ cm}, \quad b = 8 \text{ cm} \end{aligned}$$

Obujam kvadra jednak je $V = abc = 480 \text{ cm}^3$.

ZADATAK 7.2.51

Koliki su oplošje i obujam pravilne šesterostrane prizme ako je njezin veći dijagonalni presjek kvadrat površine 36 cm^2 ?

RJEŠENJE

Iz površine presjeka imamo

$$\begin{aligned} d^2 &= 36 \implies d = 6 \\ d &= 2a \implies a = 3. \end{aligned}$$

Baza je jednaka

$$B = 6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2.$$

Oplošje je

$$O = 2B + P = 27\sqrt{3} + 6 \cdot a \cdot d = 27(4 + \sqrt{3}) \approx 154.77 \text{ cm}^2,$$

a obujam

$$V = B \cdot d = 81\sqrt{3} \approx 140.3 \text{ cm}^3.$$

ZADATAK 7.3.15

Površina pobočja pravilne četverostrane piramide iznosi 544 cm^2 , a površina osnovke 256 cm^2 . Izračunaj obujam piramide.

RJEŠENJE

$$\begin{aligned}
 B &= 256 = a^2 \implies a = 16 \text{ cm}, \\
 P &= 544 = 4 \cdot \frac{a \cdot v_1}{2} \\
 v_1 &= \frac{544}{2 \cdot 16} = 17 \text{ cm}, \\
 v &= \sqrt{v_1^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{289 - 64} = 15 \text{ cm} \\
 V &= \frac{B \cdot v}{3} = \frac{256 \cdot 15}{3} = 1280 \text{ cm}^3.
 \end{aligned}$$

ZADATAK 7.3.17

Osnovka piramide jednakostraničan je trokut sa stranicom duljine 12 cm. Duljina svakog bočnog brida je 13 cm. Koliki je prikloni kut bočnog brida prema ravnini osnovke? Koliki su prikloni kutovi bočnih strana prema osnovci?

RJEŠENJE

Najprije računamo prikloni kut bočnog brida prema ravnini osnovke

$$\cos \alpha = \frac{R}{b} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{13} = \frac{4\sqrt{3}}{13} = 0.53293871 \implies \alpha = 57^\circ 48'.$$

Kut između bočnih strana i osnovke je

$$\cos \beta = \frac{r}{v_1} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{169 - 36}} = 0.3 \implies \beta = 72^\circ 31'.$$

ZADATAK 7.3.18

Osnovka piramide je trokut sa stranicama duljina 15 cm, 16 cm i 17 cm. Bočni bridovi piramide s osnovkom zatvaraju kut od 45° . Koliki je obujam piramide?

RJEŠENJE

$$\begin{aligned}
 a &= 15 \text{ cm}, \quad b = 16 \text{ cm}, \quad c = 17 \text{ cm} \\
 s &= \frac{a + b + c}{2} = \frac{15 + 16 + 17}{2} = 24 \text{ cm} \\
 B &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{24 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \sqrt{12\,096} \approx 110 \text{ cm}^2 \\
 v &= R \quad \text{jer bočni bridovi zatvaraju kut od } 45^\circ \\
 B &= \frac{abc}{4R} = 110 \text{ cm}^2 \implies R = \frac{abc}{440} = \frac{15 \cdot 16 \cdot 17}{440} = 9.27 \text{ cm} = v \\
 V &= \frac{1}{3}Bv = \frac{1}{3} \cdot 110 \cdot 9.27 = 340 \text{ cm}^3
 \end{aligned}$$

ZADATAK 7.3.19

Koliki je obujam trostrane piramide kojoj je osnovka trokut sa stranicama duljina 13, 14, 15 cm, a svi su bočni bridovi prema osnovci priklonjeni pod 70° ?

RJEŠENJE

$$B = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{7056} = 84 \text{ cm}^2$$

$$R = \frac{abc}{4P} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4 \cdot 84} = \frac{2730}{336} = 8.125 \text{ cm}$$

$$v = R \operatorname{tg} \varphi = 8.125 \operatorname{tg} 70^\circ = 22.32 \text{ cm}$$

$$V = \frac{1}{3} B \cdot v = \frac{1}{3} \cdot 84 \cdot 22.32 \approx 625.05 \text{ cm}^3$$

ZADATAK 7.3.20

Osnovka piramide je trokut čije su stranice dugačke 13, 20 i 21 cm. Pobočke zatvaraju s ravninom osnovke kutove od 30° . Koliki je obujam piramide?

RJEŠENJE

$$s = \frac{21 + 20 + 13}{2} = 27 \text{ cm}$$

$$B = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{27 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 14} = \sqrt{15876} = 126 \text{ cm}^2,$$

$$B = r \dots \implies r = \frac{B}{s} = \frac{126}{27} = \frac{14}{3} \text{ cm}^2$$

$$v = r \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{14}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{14\sqrt{3}}{9} \text{ cm}$$

$$V = \frac{1}{3} B \cdot v = \frac{1}{3} \cdot 126 \cdot \frac{14\sqrt{3}}{9} = \frac{196\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$$

ZADATAK 7.3.21

Koliki je obujam trostrane piramide kojoj su osnovni bridovi dugački 4 cm, 5 cm i 7 cm, a pobočke s osnovkom piramide zatvaraju kut od $48^\circ 30'$?

RJEŠENJE

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{4+5+7}{2} = 8 \text{ cm}$$

$$B = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{8 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6} \text{ cm}^2$$

$$B = r \dots \implies r = \frac{B}{s} = \frac{4\sqrt{6}}{8} = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ cm}$$

$$v = r \operatorname{tg} 48^\circ 30' = \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot 1.130294 = 1.384322 \text{ cm}$$

$$V = \frac{1}{3} B \cdot v = \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot 1.130294 \approx 4.52 \text{ cm}^3$$

