

RADNI MATERIJAL 19 – SUKLADNOST I SLIČNOST



1. Sukladnost dužina

\overline{AB} \overline{CD}
 A B C D

Dvije dužine \overline{AB} i \overline{CD} su sukladne ako su **jednake duljine**, tj. ako je $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$.
 pr. sve stranice jednakostraničnog trokuta, kraci jednakokravnog trapeza i sl.

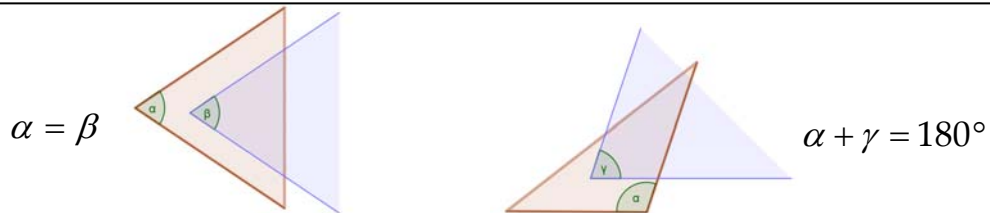
2. Sukladnost kutova

Dva su kuta sukladna ako imaju **istu mjeru**.

pr. kutovi uz osnovicu jednakokravnog trokuta i trapeza, suprotni kutovi u paralelogramu i sl.

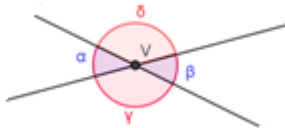
Kutovi s paralelnim kracima

Ako su kutovima kraci paralelni ti su kutovi ili **sukladni** ili **suplementni**



Posljedica:

a) Poučak o vršnim kutovima

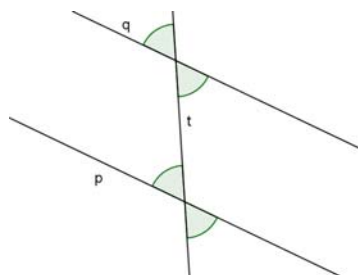


$$\alpha = \beta$$

$$\gamma = \delta$$

Dva pravca koji se sijeku određuju **dva para** međusobno sukladnih kutova

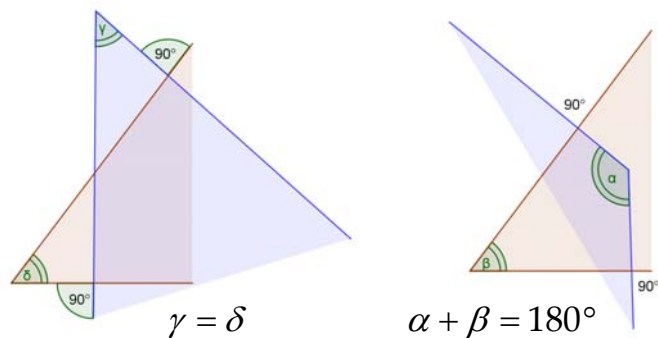
b) Poučak o kutovima uz presječnicu (transverzalnu)



Neka su p i q paralelni pravci. Pravac t koji ih siječe određuje s njima **sukladne kutove**

c) Kutovi s okomitim kracima

Ako su kutovima kraci okomiti ti su kutovi ili **sukladni** ili **suplementni**.



3. Sukladnost trokuta

Trokuti ABC i $A'B'C'$ su sukladni akko imaju **sukladne** odgovarajuće **stranice** i **sukladne** odgovarajuće **kutove**. $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$

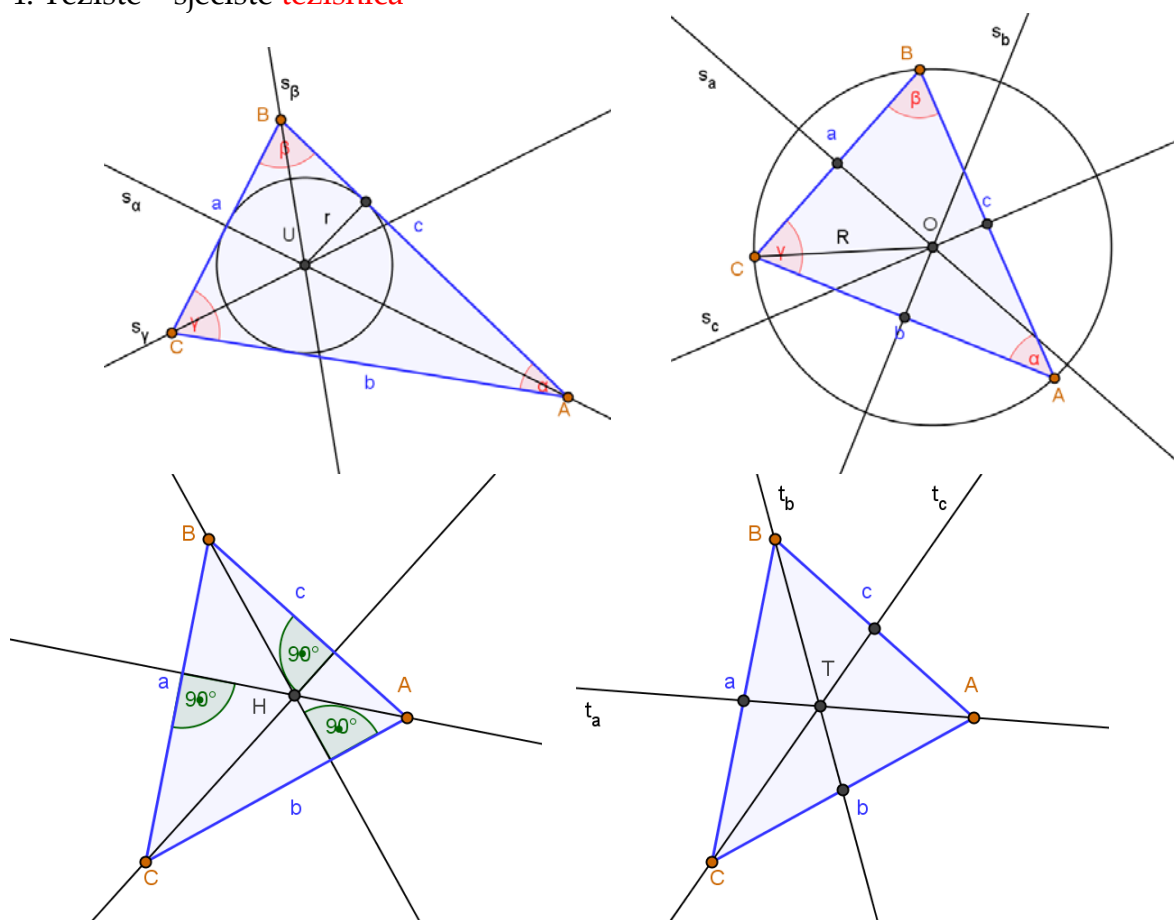
Dovoljno je da se podudaraju u tri od šest osnovnih elemenata iz čega slijedi sukladnost ostalih.

Poučci o sukladnosti (*nadopuni*):

1. SSS _____
2. SKS _____
3. KSK _____
4. SSK _____

ČETIRI KARAKTERISTIČNE TOČKE TROKUTA

1. Središte opisane kružnice – sjecište **simetrala stranica trokuta**
2. Središte upisane kružnice – sjecište **simetrala unutarnjih kutova trokuta**
3. Ortocentar – sjecište **visina trokuta**
4. Težište – sjecište **težišnica**



Napomena: Četiri karakteristične točke trokuta leže na **Eulerovom pravcu**.

Vrijedi $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

Spoji:

1. Simetrala dužine (stranice)

Dužina koja spaja vrh trokuta s polovištem nasuprotne stranice.

2. Simetrala kuta

Pravac okomit na dužinu (stranicu) koji prolazi njenim polovištem.

3. Visina

Pravac koji prolazi vrhom kuta i dijeli taj kut na dva sukladna dijela.

4. Težišnica

Okomica na stranicu koja prolazi nasuprotnim vrhom.

Srednjica trokuta - dužina koja spaja **polovišta** dviju stranica trokuta.

- paralelna je sa stranicom i dvostruko **kraća** od nje

POVRŠINA TROKUTA

$$\Rightarrow P = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2} \quad (\text{često se koristi za računanje visine trokuta})$$

$$\Rightarrow \text{Heronova formula } P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{gdje je } s = \frac{a+b+c}{2}$$

$$\Rightarrow P = \frac{abc}{4R} \quad \text{gdje je } R - \text{polumjer opisane kružnice}$$

$$\Rightarrow P = \rho \cdot s \quad \text{gdje je } \rho - \text{polumjer upisane kružnice}$$

Pr.1. Odredi površinu trokuta čije su stranice 13 cm, 14 cm i 15 cm.

Pr.2. Odredi polumjer upisane kružnice trokuta čije su stranice 11 cm, 13 cm i 20 cm.

Pr.3. Odredi polumjer opisane kružnice trokuta čije su stranice 11 cm, 13 cm i 20 cm.

Pr.4. Odredi duljinu najdulje visine trokuta ako su duljine stranica 15 cm, 112 cm i 113 cm.

Pr.5. Kolika je površina paralelograma ako su duljine njegovih stranica 12 cm i 17 cm, a duljina jedne dijagonale 25 cm.

PROPORCIONALNOST DUŽINA. TALESOV TEOREM.

1. Omjeri i razmjeri

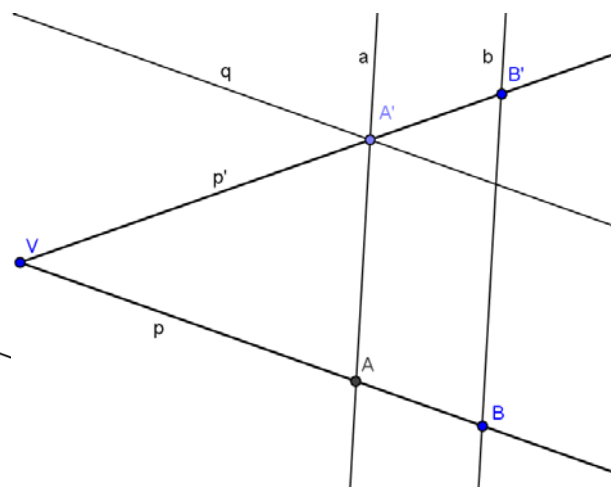
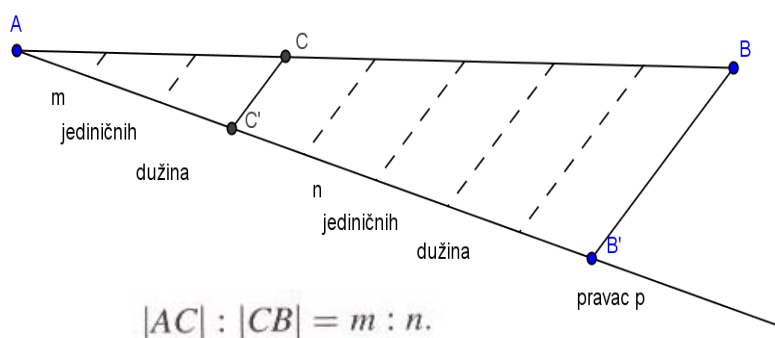
Omjer – količnik $a : b$ brojeva a i b

Razmjer ili proporcija – jednakost dvaju omjera $a : b = c : d \Rightarrow ad = bc$

Umnožak vanjskih članova razmjera jednak je umnošku unutarnjih članova.

Produženi razmjer $a_1 : a_2 : a_3 : \dots : a_n = b_1 : b_2 : b_3 : \dots : b_n$

Dijeljenje dužine u zadanom omjeru



2. Talesov teorem o proporcionalnosti

Paralelni pravci a i b sijeku kut pVp' u točkama A i A' i B i B'

Paralelni pravci na krakovima kuta odsjecaju proporcionalne dužine

$$|VA| : |AB| = |VA'| : |A'B'|$$

$$|VA| : |VB| = |VA'| : |VB'|$$

postoji i obrat teorema

Ako dva pravca odsijecaju na krakovima kuta proporcionalne dužine, onda su ti pravci paralelni.

Pr.1. Krakovi kuta α presječeni su dvama paralelnim pravcima BC i DE . Ako je

$$|AB| = 8\text{cm}, |AD| = 12\text{cm}, |AC| = 10\text{cm} \quad \text{koliko je } |AE|?$$

Pr.2. Jesu li pravci BC i DE paralelni ako je $|AB| : |BD| = 3 : 4, |AC| = 1.2\text{cm}, |AE| = 2.8\text{cm}?$

Pr.3. Duljine osnovica trapeza $ABCD$ su 2.4 dm i 1.6 cm, a duljine krakova 1.6 dm i 2 dm.

Produžeci krakova \overline{AD} i \overline{BC} sijeku se u točki E . Kolike su duljine dužina \overline{CE} i \overline{DE} ?

SLIČNOST TROKUTA

Trokuti ABC i A'B'C' su slični akko se podudaraju u sva tri kuta. $\Delta ABC \approx \Delta A'B'C'$

Ako su dva trokuta slična onda su im odgovarajuće stranice proporcionalne.

$$a : a' = b : b' = c : c'$$

Omjer duljina stranica $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k$ zove se koeficijent sličnosti.

Poučci o sličnosti:

1. SSS _____
2. SKS _____
3. KK _____

Svi elementi trokuta – težišnice, simetrale kutova, visine, polumjeri opisane i upisane kružnice – proporcionalni su s istim koeficijentom proporcionalnosti k.

Opsezi i površine sličnih trokuta

$$O = a + b + c \quad \frac{O'}{O} = k$$

$$O' = a' + b' + c'$$

$$\frac{P'}{P} = k^2$$

Omjer **opsega** sličnih trokuta jednak je koeficijentu sličnosti tih trokuta

Omjer **površina** sličnih trokuta jednak je kvadratu koeficijenta sličnosti tih trokuta

Zadaci sličnost

Pr.1. Duljine stranica trokuta iznose 3cm, 4cm i 6cm. Kolike su duljine stranica sličnog trokuta kojemu je opseg jednak 58.5cm?

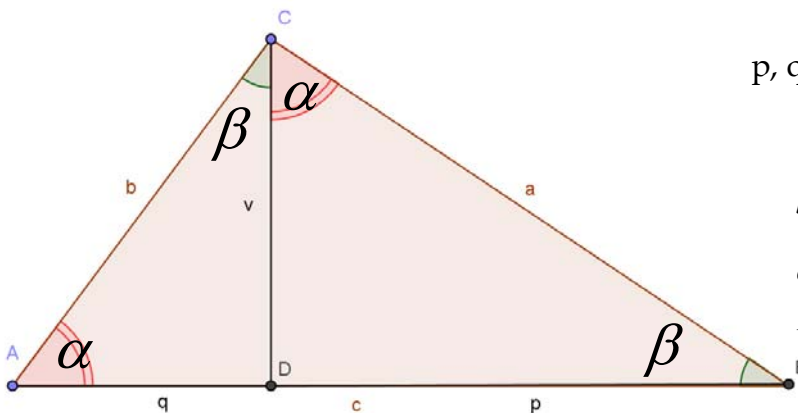
Pr.2. Duljine stranica trokuta jednake su 5.5cm, 12.5cm i 15cm. Sličan trokut ima površinu 21.12 cm^2 . Kolike su duljine stranica tog sličnog trokuta?

Pr.3. Stranice trokuta su redom 4, 13 i 15cm. Odredi površinu većeg sličnog trokuta ako je koeficijent sličnosti $k = 0.4$.

Pr.4. Stranice trokuta odnose se kao 5 : 6 : 8. Odredi duljine stranica ako je razlika najduže i najkraće stranice jednaka 15cm.

EUKLIDOV POUČAK

Primjena poučaka sličnosti na pravokutan trokut.



p, q – projekcije kateta na hipotenuzu

$$\Delta ABC \approx \Delta ACD \approx \Delta CBD$$

$$b : q = c : b \Rightarrow b^2 = cq \Rightarrow b = \sqrt{cq}$$

$$a : p = c : a \Rightarrow a^2 = cp \Rightarrow a = \sqrt{cp}$$

$$v : p = q : v \Rightarrow v^2 = pq \Rightarrow v = \sqrt{pq}$$

$$\alpha + \beta = 90$$

Zadaci Euklidov poučak

Pr.1. Neka su p i q duljine odsječaka na koje nožište visine iz vrha pravog kuta pravokutnog trokuta dijeli hipotenuzu. Neka je v duljina te visine.

Ako je $p = 9 \text{ cm}$, $q = 16 \text{ cm}$, izračunaj duljine kateta trokuta

Ako je $v = 60 \text{ cm}$, $a = 68 \text{ cm}$, kolike su duljine stranica trokuta?